

# 同心超球上の摂動を用いたカオス的 Particle Swarm Optimization

○東諒 河野圭 巽啓司 (大阪大学)

## Chaotic particle swarm optimization based on concentric hyper-spherical perturbations for global optimization

\*R. Higashi, K. Kouno and K. Tatsumi (Osaka University)

**Abstract**— Particle swarm optimization (PSO) is one of metaheuristics for global optimization, and its many improved methods have been proposed. In this paper, we focus on the PSO-SDPC in which particles search around the pbest and gbest intensively by using a perturbation-based chaotic system, and the chaoticity is guaranteed by the perturbations. However, its searching ability is widely changed according to the coordinate system which is used to represent the problem, because the perturbations is added along the base of the coordinate system. Therefore, we propose a chaos system based on concentric hyper-spherical perturbations, which is close to being invariant under rotation. In addition, we show that the invariance and chaoticity are observed in diagrams of point generated by the proposed system. The searching ability of PSOs with the proposed method is evaluated through numerical experiments.

**Key Words:** Particle Swarm Optimization, metaheuristics, chaotic system

## 1 はじめに

局所解を多数持つ多次元非線形関数に対する大域的最適化手法の1つに Particle Swarm Optimization (PSO) がある。この手法は蜂や魚などの群れで行動する生物の動きをモデル化した手法であり、その求解能力の高さと計算時間の短さが特徴である。しかし、局所解を多数持つ複雑な問題においては探索初期に局所最適解に収束してしまい、良質な解が見つからないまま探索が終わってしまうことがある<sup>1)</sup>。このような欠点を補うため提案されたさまざまな PSO の改良案の中で、カオスを用いた PSO、特に PSO-SDPC に焦点を当てる<sup>3)</sup>。PSO-SDPC は、pbest, gbest を局所解にもつ仮想的な 4 次関数に摂動付きの最急降下法を適用して得られるカオス力学系をパーティクルの位置更新に用いる手法である。この手法では、更新式がカオス的となる十分条件が理論的に示されており、パラメータ値の設定が容易である。また、そのカオス的挙動により望ましくない局所解にとらわれることなく pbest, gbest 周辺を重点的に探索を行える。しかし、PSO-SDPC は、求解対象の問題を表現する座標系の選択により、探索能力が大きく変化するという欠点がある。これは、摂動項を座標系の基底に沿って付加していることに起因している。本論文では、この問題を解決するため、探索を行いたい点の同心超球上に沿った摂動を更新式に付加した力学系を提案する。この系は回転変換に対してほぼ不変であり、この系を用いた PSO の探索能力が、問題を表現する座標の選択により、大幅に変動しないことを数値実験により示す。

## 2 Particle Swarm Optimization (PSO)

### 2.1 Original PSO (OPSO)

本論文では、多峰性の非線形関数  $f(x)$  を最小化する以下のような問題について考える。

$$(P1) \quad \min f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in \prod_{i=1}^n [d_{\min}, d_{\max}]$$

この問題を解くためにメタヒューリスティクスの一つである Particle Swarm Optimization (PSO)<sup>2)</sup> に着目する。PSO では、複数のパーティクルと呼ばれる個体を用いる。各パーティクルは自身が見つけた最良解（以下 pbest）と、すべてのパーティクルの中での最良解（以下 gbest）を用いて探索を行う。時刻  $t$  でのパーティクルの位置ベクトル  $x^i(t)$  と速度ベクトル  $v^i(t)$  の  $j$  要素は以下の式により更新される。

$$\begin{cases} v_j^i(t+1) := wv_j^i(t) + c_1r_1(p_j^i(t) - x_j^i(t)) \\ \quad \quad \quad + c_2r_2(g_j(t) - x_j^i(t)), \\ x_j^i(t+1) := x_j^i(t) + v_j^i(t+1), \end{cases} \quad (1) \quad j = 1, \dots, n$$

ここで、 $p^i(t)$ ,  $g(t)$  はパーティクル  $i$  が保有する pbest, gbest の位置を表し、 $w$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  はパラメータ、 $r_1$ ,  $r_2$  は  $(0, 1)$  区間からの一様乱数である。

OPSO は局所解へ早く収束するという特徴を持ち、単純な問題については様々なパラメータを用いても最適解の探索が可能である。しかし、更新式が問題の座標系に依存しているため、座標系が変化するとき探索能力が大きく変化する可能性がある。また、局所解を多数持つ複雑な問題においては、探索初期に局所最適解に収束してしまい、大域最適解が見つからないまま探索が終わってしまうことがある<sup>1)</sup>。このような PSO の問題点を改善するために様々な PSO の改良案が提案されている。

## 3 カオス力学系を用いた PSO

PSO の改良案として、カオス力学系を用いた様々な手法が提案されている<sup>4)</sup>。本節では、パーティクルの位置更新にカオス力学系を用いることで、望まぬ局所解への収束を回避する手法の一つである PSO-SDPC について簡単に述べる。

### 3.1 PSO-SDPC

PSO-SDPC は、カオスシステムを用いてパーティクルの位置を更新することで gbest, pbest 周辺を、局所

解にとらわれるのを回避しながら、その2点を重点的に探索する PSO の改良モデルである<sup>3)</sup>。反復  $t$  でのパーティクル  $i$  に対し、仮想4次関数

$$f_v^{(i,t)}(x) := \frac{\|x^i(t) - g(t)\|^2 \|x^i(t) - p^i(t)\|^2}{4\|r^i(t)\|^2} \quad (2)$$

を考え、この関数の最小化問題に摂動項付きの最急降下法を適用した更新式は、

$$(C1) \quad \begin{aligned} x_j^i(t+1) := & x_j^i(t) \\ & + \frac{\alpha \|x^i(t) - g(t)\|^2}{2\|r^i(t)\|^2} (p_j^i(t) - x_j^i(t)) \\ & + \frac{\alpha \|x^i(t) - p^i(t)\|^2}{2\|r^i(t)\|^2} (g_j(t) - x_j^i(t)) \\ & - \beta \omega |r_j^i(t)| \sin\left(\frac{\omega}{|r_j^i(t)|} (x_j^i(t) - q_j^i(t))\right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $\alpha, \beta, \omega$  はパラメータであり、 $r_j^i(t) := \frac{g_j(t) - p_j^i(t)}{2}$ 、 $q_j^i(t) := \frac{g_j(t) + p_j^i(t)}{2}$  である。

カオス力学系 (C1) は  $2m\pi < \omega < 2m\pi + \frac{\pi}{6}$  を満たす整数  $m > 2$  が存在し、正の定数  $\alpha, \beta, \omega$  が

$$0 < \alpha \leq 1 \quad (3)$$

$$\beta\omega^2 \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha\pi + \frac{3\pi}{2} \quad (4)$$

を満たすとき、gbest や pbest のそれぞれ近傍に、スナックバックリペラと呼ばれる不安定な (C1) の不動点が存在することが示されている。この不動点の近傍内を初期点とする点列は、一度その不動点から離れつつも、再びその点に近付くことが知られており<sup>5)</sup>、ホモクリック軌道と呼ばれる。このような軌道の存在は、力学系がカオスであることを示し、この (C1) を用いると、gbest もしくは pbest の周辺を、パーティクルがトラップされることなく重点的に探索することができる。上記 pbest, gbest とそれぞれの近傍のスナックバックリペラとの距離は、 $\omega$  を十分大きく選べば、十分小さくなることも示されている。また、式 (3), (4) から PSO-SDPC のパラメータ設定が容易であることがわかる。

PSO-SDPC では、OPSO の更新式 (1) とカオス更新式 (C1) を確率的に使い分けることで更新を行う。このとき、pbest と gbest が一致するパーティクル  $i$  は OPSO を用いて更新する。OPSO により更新されるパーティクルが少なくとも1つ存在するため、gbest 周辺の詳細な探索は常に保証されている。また、探索初期においてカオス更新頻度を高くして大域的な探索を行い、探索終盤においてカオス更新される要素数を小さくすることで OPSO による詳細な探索を行っている。

### 3.2 PSO-SDPC により生成される点列

本節では、問題を表す座標系を変化させたときの (C1) により生成される点列の分布状況を調べるため、2次元更新式 (C1) により生成される1つのパーティクルの点列を描画する。まず、pbest, gbest の位置をそれぞれ  $p^1 = (1, 1)$ 、 $g^1 = (-1, -1)$  および  $p^2 = (\sqrt{2}, 0.01)$ 、 $g^2 = (-\sqrt{2}, -0.01)$  の2通り用意し、ランダムに定めた80個の初期点から (C1) を用いて5000回反復更新して得ら

れた点列をプロットした。パラメータ値は  $\alpha = 0.3$ 、 $\beta = 0.0005$ 、 $\omega = 90\pi$  とした。最良解間方向が  $x_1, x_2$  方向とで45度をなしている場合と  $x_1$  方向にほぼ平行になっている2通りの場合を比較する。

Fig.1 より、(C1) により生成された点列の広がり方が2つの場合で大きく異なっていることが分かる。このことから、2次元において PSO-SDPC のカオス更新式 (C1) が座標系の選択に依存していることがわかる。同様な現象はより高次元でも観測でき、これは摂動項が座標系の基底に沿って付加されているためだと考えられる。メタヒューリスティック解法は、求解能力だけでなく、多くの問題に適用できる汎用性の高さも特徴であるため、座標系の選択による求解能力の大幅な変化は望ましくない。そこで、上記の特性を持たないようなカオス生成法を提案する。

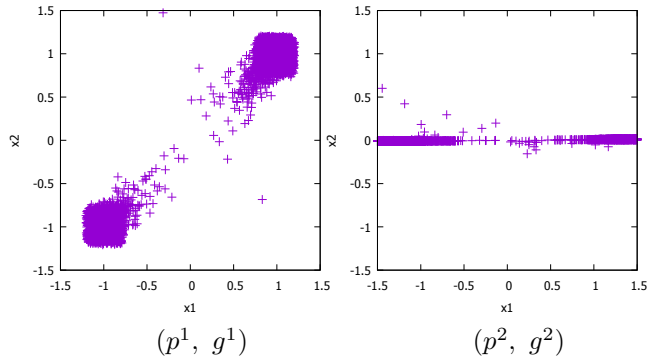


Fig. 1: (C1) による生成点列

## 4 提案法

### 4.1 提案カオス生成法

本節では、pbest と gbest のそれぞれを中心とした同心超球上の摂動を用いる力学系を提案する。PSO-SDPC では pbest, gbest を局所解にもつ仮想4次関数  $f_v^{(i,t)}(x)$  を用いるのに対し、提案法では、pbest, gbest をそれぞれ局所解とする仮想二次関数に対し、それぞれ最急降下法を適用した更新式を、パーティクルの位置により切り替える方法を用いる。pbest と gbest のうち時刻  $t$  でのパーティクル  $i$  との距離がより小さいものを  $q^i(t)$  とし、そのパーティクルの更新には  $q^i(t)$  を用いた更新式を用いる。これにより、pbest に近いパーティクルは pbest 周辺を、gbest に近いパーティクルは gbest 周辺をそれぞれ重点的に探索する。さらに、 $q^i(t)$  を中心とする同心超球上の摂動を更新式に付加し、カオスとすることで、大域的な探索を実現する。PSO-SDPC では摂動項を座標系の基底に沿って付加するのに対し、提案法では、 $q^i(t)$  を中心とした基本的には点対称な摂動を付加するため、座標系の選択に対して求解能力が大きく変化しないことが期待できる。

パーティクル  $i$  の反復  $t$  での更新を考える。このとき、 $r^i(t) = |p^i(t) - g(t)|/2$  とすると、 $x^i(t)$  のカオス更新式は

$$(C2) \quad \begin{aligned} x^i(t+1) = & x^i(t) + \alpha(q^i(t) - x^i(t)) \\ & - \rho(x^i(t) - q^i(t), r^i(t)) \end{aligned}$$

となる． $\alpha$  はステップサイズであり，摂動項  $\rho$  は

$$\begin{aligned} \rho(x^i(t), r^i(t)) := & \beta r^i(t) \sin\left(\frac{\omega_d \|x^i(t)\|}{r^i(t)}\right) c(\theta(u)) \\ & + c_\rho \beta r^i(t) \sin\left(\frac{\omega_d \|x^i(t)\|}{r^i(t)}\right) \\ & \left(1 - \exp\left(\frac{c_e \|x^i(t)\|^2}{r^i(t)^2}\right)\right) c(\omega_v \theta(u)) \end{aligned} \quad (5)$$

で与える．また， $c: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ ， $\theta: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  はそれぞれ  $c(y) := (\cos y_1, \dots, \cos y_n)^\top$ ， $\theta(y) = (\arccos(y_1/\|y\|), \dots, \arccos(y_n/\|y\|))^\top$  である． $x^i(t)$  が半空間

$$X_g := \left\{ x \in \mathcal{R}^n \mid x^\top(g(t) - p^i(t)) < \frac{\|g(t)\|^2 - \|p^i(t)\|^2}{2} \right\}$$

に含まれるなら， $x^i(t)$  は  $q^i(t) = g(t)$  として，

$$X_p := \left\{ x \in \mathcal{R}^n \mid x^\top(g(t) - p^i(t)) > \frac{\|g(t)\|^2 - \|p^i(t)\|^2}{2} \right\}$$

に含まれるなら， $x^i(t)$  は  $q^i(t) = p^i(t)$  として (C2) により，更新される．どちらの半空間にも含まれないなら，ランダムに  $p^i(t)$  か  $g(t)$  のいずれかを  $q^i(t)$  とする．ただし， $q^i(t)$  と  $x^i(t)$  の距離が十分に小さいときには，数値計算上の安定のため， $\theta(u)$  の値を  $[-\pi, \pi]$  区間からの一様乱数とする．

パーティクルは， $q^i(t)$  の方向にステップサイズ  $\alpha$  をもとに動きつつ，摂動項  $\rho$  によりカオス的に動く．摂動項  $\rho$  の第1項は，その振幅が  $q^i(t)$  と  $x^i(t)$  の距離により定まり，振動方向が  $q^i(t) - x^i(t)$  で定まるため，座標系の選択に依存しない．また，第二項の振幅と振動方向は，座標系の基底ベクトルと  $q^i(t) - x^i(t)$  のなす角の  $\omega_v$  倍によって定まるものの， $\omega_v$  が十分大きい場合は座標系への依存性は低いとみなせる．そのため，この力学系を用いて探索を行った場合，問題を表現する座標系の選択によってその求解能力が大きく変化しないことが期待できる．

## 4.2 カオス的となる十分条件

次に，(C2) がカオス的となる十分条件について議論する．ここで議論を簡単にするため， $p^i(t)$  と  $g(t)$  が更新されないものとし，いま，パーティクル  $i$  に近い最良解  $q^i(t)$  周辺で (C2) により生成される点列について議論する．正の実数  $\alpha$  が  $0 < \alpha < 1$  を満たすとき，以下の定理が成り立つ．

**定理 1** 正の実数  $c_\rho$ ， $\omega_d$  と整数  $n$ ， $\omega_v$  が  $c_\rho > 0$ ， $\omega_d > 2\pi$ ， $\omega_v \geq 2$ ， $n \geq 2$ ，を満たし，さらに  $\beta$ ， $c_\rho$ ， $\omega_d$ ， $\omega_v$ ， $n$  が

$$\omega_v \sin(\omega_v \bar{\theta}) \neq \sqrt{n} \cos(\omega_v \bar{\theta}) \sin(\bar{\theta}), \quad (6)$$

$$\beta \omega_d \geq 4\pi, \quad (7)$$

$$\omega_d^2 > c_\rho c_e \omega_v, \quad (8)$$

$$\omega_v > 64\sqrt{n} \quad (9)$$

を満たすとき， $q^i(t)$  は (C2) のスナックバックリペラである．ここで  $\bar{\theta}$  は， $\bar{\theta} = \arccos(1/\sqrt{n})$  である．

また， $\omega_d > 2\pi$  により，摂動項  $\rho$  の周期  $2\pi r^i(t)/\omega_d$  が  $r^i(t)$  より小さいことがわかる．さらに，定理1で存在が示されるホモクリック軌道は，サイズがその周期より小さい近傍内にあり， $r^i(t)$  は， $q^i(t)$  と  $X_g$ ， $X_p$  の境界との距離である．これらのことから，それぞれのホモクリック軌道は  $X_g$ ， $X_p$  内に存在し， $p^i(t)$ ， $g(t)$  を中心とする (C2) はそれぞれがカオス的となることがわかる．

また，PSO-SDPC よりも，カオス条件に関わるパラメータの数は多いものの，その条件を満たす値の選択はそれほど難しくない．また，一般に条件式において等号が成り立つことはないと考えられることに注意する．

## 4.3 提案法の力学系を用いた近似解法

本節では，提案法の力学系を用いた近似解法について述べる．提案法では，主に 4.1 で述べたようにカオス更新式 (C2) を用いて各パーティクルの更新を行うが，pbest と gbest の距離が十分に小さいときは PSO-SDPC と同様に OPSO による更新を行うため，pbest，gbest 周辺の詳細な探索は常に保証されている．pbest もしくは gbest が更新された場合，パーティクルはその更新点に位置し，かつその点は (C2) の不動点でもあるため，そのパーティクルは停止する．これを避けるため，その更新の際にパーティクルの位置をランダムに選んだベクトルによりずらすものとする．また，探索の初期に十分に大きな  $\beta$  を設定し，探索が進むにつれて  $\beta$  を小さくすることで，探索初期では大域的な探索を行い，探索終盤では局所的な探索を行う．さらに，OPSO を用いた更新を行うパーティクルを複数用いることにより，pbest，gbest 周辺をより重点的に探索を行う．

## 4.4 提案法により生成される点列

本節では，提案したカオス更新式 (C2) の2次元力学系により生成される点列を 3.2 と同様に描画し，Fig.1 と比較する．その結果を Fig.2 に示す．パラメータ値は  $\alpha = 0.1$ ， $\beta = 0.5$ ， $\omega_v = 1000$ ， $\omega_d = 1000$ ， $c_\rho = 0.1$ ， $c_e = 10$  を用いた．いま，最良解間方向が  $x_1$ ， $x_2$  方向とで 45 度をなしている場合と  $x_1$  方向にほぼ平行になっている場合を比較する．Fig.1 では，(C1) により生成された点列の広がり方が 2 つの場合で大きく異なっていたが，Fig.2 では，(C2) により生成された点列の広がり方は，2 つの場合でほぼ同じ程度であることがわかる．同様の現象は高次元においても観測され，提案法のカオス更新式 (C2) が座標系の選択に依存しないことがわかる．

## 5 数値実験結果

数値実験により，ベンチマーク問題に提案法や従来法を適用し，求解上の効率を比較した．その結果の詳細については発表時に示す．

## 6 終わりに

本研究では，カオスを用いた PSO の改良手法である PSO-SDPC に着目した．PSO-SDPC では，対象とする問題を表現する座標系の基底に沿って摂動項を付加することでカオスを生成しているため，その座標系が変わると，探索効率が変動する問題がある．そこで，上記の問題を解消するため，pbest と gbest のそれぞれ

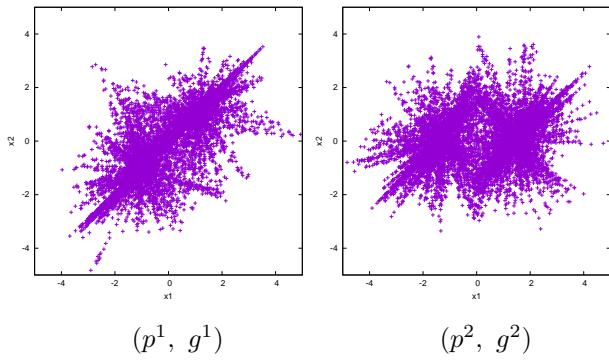


Fig. 2: (C2) による生成点列

を中心とした同心超球上の摂動を付加したカオス力学系を提案し、問題を変換する座標系に対する依存度が小さくなることを示した。

### 参考文献

- 1) 相吉英太郎, 安田恵一郎, メタヒューリスティクスと応用, 電気学会 (2007)
- 2) J. Kennedy, R. C. Eberhart, "Particle swarm optimization," *Proc. of the IEEE International Joint Conf. on Neural Networks, IEEE Press*, pp. 1942-1948 (1995)
- 3) K. Tatsumi, T. Ibuki, T. Tanino, "Particle swarm optimization with stochastic selection of perturbation-based chaotic updating system," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 269 pp. 904-929 (2015)
- 4) K. Tatsumi, T. Tanino, "A sufficient condition for chaos in the gradient model with perturbation method for global optimization," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.23, No.6, pp.1350102 (2013)
- 5) F. R. Marotto, "Snap-back repellers imply chaos in  $R^n$ ," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 63, Issue 1, pp. 199-223 (1978)