

# 近似的多目的マルチクラスSVMのソフトマージンへの拡張

○中尾采美 松木靖浩 楠木祥文 巽啓司 (大阪大学)

## Soft-Margin Extension of the Approximate Multi-Objective Multi-Class SVM

\*A. Nakao, Y. Matsugi, Y. Kusunoki and K. Tatsumi (Osaka University)

**Abstract**— The approximate multi-objective multi-class support vector machine (AMMSVM) is a sophisticated supervised learning method in the field of pattern recognition. The main goal of the AMMSVM lies in finding a solution to a multi-objective optimization problem, which maximizes the geometric margins between different classes simultaneously. In order to solve the multi-objective optimization problem, it is transformed into a second-order cone program to which the reference point method can be applied. In this paper we propose an extension of the current hard-margin AMMSVM to a soft-margin model, by allowing the violation of classification boundaries and measuring this violation with slack variables. The main aim is the minimization of the ratio between the violation of boundaries and the geometric margin, as well as maximizing the geometric margin between classes. The multi-objective optimization problem of the soft margin AMMSVM can also be transformed to a second-order cone program and be solved by the reference point method.

**Key Words:** Support vector machine, multi-objective, second-order cone program, soft margin

### 1 はじめに

サポートベクトルマシン (SVM) <sup>8)</sup> は高い汎化能力を有する識別器として知られている。元来、2クラス識別問題に対して提案されたSVMの学習モデルに対して、正則化項を最小化するという統計的解釈と、異なるクラスのデータ間のマージンを最大化するという幾何学的解釈の二つの見方がある。SVMのマルチクラス拡張の多くは統計的解釈に基づいているが、近年、Tatsumiら<sup>6,7)</sup>は、複数あるクラスペア間の幾何マージンを最大化する多目的最適化問題によって、マルチクラスSVMの学習モデルを提案した。

しかし、その多目的最適化問題は非凸な制約条件を含むため、一般のスカラー化手法による求解は困難である。そこで、それを凸近似するアイデアがKusunokiら<sup>1)</sup>によって提案され、これに基づいて、近似的多目的マルチクラスSVMが提案された<sup>5,2)</sup>。この学習モデルは誤差を許容しないハードマージンであるため、本研究では、これをソフトマージンへと拡張する。

### 2 幾何マージン最大化に基づくマルチクラスSVM

マルチクラス識別問題は以下のように与えられる。 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ を識別したいクラスのラベル集合とする。訓練データは、 $l$ 個の入力ベクトル  $x^i \in R^n$  とそれらに対応するラベル  $y_i \in M, i \in I = \{1, 2, \dots, l\}$  によって与えられるとする。SVMの目的は、未知の入力  $x \in R^n$  のクラスラベルを推定する線形の決定関数  $f: R^n \rightarrow M$  を訓練データから学習することである。また、線形識別が適さないデータに対応するために非線形SVMが提案されている。非線形SVMでは、関数  $\phi$  を用いて、入力ベクトル  $x^i \in R^n$  を高次元特徴空間  $F \ni \phi(x^i)$  に写すことによってデータが線形識別可能となるように変換し、その変換されたデータに対して線形決定関数を学習する。その際、カーネル法を用いることで特徴ベクトルを明示的に知ることなく学習を行うことができる<sup>4)</sup>。本稿では非線形SVMを扱うものとし、 $i$ 番目のデータの特徴ベクトルを  $\phi(x^i)$  で表す。簡単のため、 $F$  は有限次元とする。

以下では、本稿の主題である幾何マージン最大化多目的マルチクラスSVMの導入する。まず、線形決定関数は以下のように表される。

$$f(x) = \operatorname{argmax}_{p \in M} \{(w^p)^\top \phi(x) + b^p\}$$

ここで、 $(w^p, b^p)$  はパラメータである。 $w = (w^p)_{p \in M}$ ,  $b = (b^p)_{p \in M}$  と表記する。クラスペア  $(p, q)$ ,  $p, q \in M$ ,  $q > p$  を考える。 $(p, q)$  間の識別超平面は、

$$(w^p - w^q)^\top \phi(x) + (b^p - b^q) = 0$$

と表される。この識別超平面とクラス  $p$  または  $q$  に含まれるデータとの最小距離

$$d_{pq}(w, b) = \min_{i \in I_p \cup I_q} \frac{|(w^p - w^q)^\top \phi(x^i) + (b^p - b^q)|}{\|w^p - w^q\|}$$

を幾何マージンと呼ぶ。ここで、 $I_p = \{i \in I \mid y_i = p\}$  である。この値を大きくすることが決定関数の識別率を高めることにつながるが文献<sup>7)</sup>で示されている。多目的マルチクラスSVMは、複数の幾何マージン最大化を目的とする多目的最適化問題として次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \min_{w, b, \delta} \quad & r_{12}(z), r_{23}(z), \dots, r_{(m-1)m}(z) \\ \text{s.t.} \quad & (w^p - w^q)^\top \phi(x^i) + (b^p - b^q) \geq \sqrt{\delta_{pq}}, \\ & \quad \quad \quad i \in I_p, q > p, p, q \in M, \\ & (w^q - w^p)^\top \phi(x^i) + (b^q - b^p) \geq \sqrt{\delta_{pq}}, \\ & \quad \quad \quad i \in I_q, q > p, p, q \in M, \\ & \delta_{pq} \geq 1, \quad q > p, p, q \in M. \end{aligned} \tag{S1}$$

ここで、 $\delta = (\delta_{12}, \delta_{23}, \dots, \delta_{(m-1)m})$  とし、 $r_{pq}$  は、(S1)の実行可能解  $z = (w, b, \delta)$  に対し、

$$r_{pq}(z) = \frac{1}{2} \frac{\|w^p - w^q\|^2}{\delta_{pq}}$$

である。

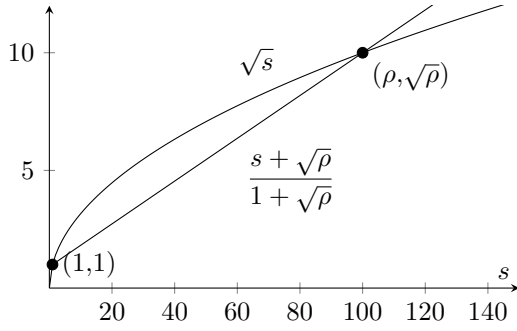


Fig. 1: Approximate affine function.

$z$  が (S1) のパレート最適解であるとき,  $r_{pq}(z)$  は, 幾何マージン  $d_{pq}(w, b)$  の逆数の 2 乗の  $1/2$  倍と一致するため, (S1) を解くことで, 幾何マージンの最大化が実現できる. しかし, その第 1 と第 2 制約式の右辺  $\sqrt{\delta_{pq}}$  のため, この問題は非凸であり求解が難しい. そこで, Kusunoki らは  $\sqrt{\delta_{pq}}$  を  $\delta_{pq}$  のアフィン関数で近似し, さらに目的関数の和を最小化する学習モデルを提案し, それによって高い汎化性をもつ識別器が得られることを示した<sup>1)</sup>. この問題は以下のように定式化される.

$$\begin{aligned}
& \min_{w, b, \delta} \sum_{p, q \in M} r_{pq}(z) \\
& \text{s.t.} \quad (w^p - w^q)^\top \phi(x^i) + (b^p - b^q) \geq \frac{\delta_{pq} + \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}}, \\
& \quad \quad \quad i \in I_p, q > p, p, q \in M, \\
& \quad \quad \quad (w^q - w^p)^\top \phi(x^i) + (b^q - b^p) \geq \frac{\delta_{pq} + \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}}, \\
& \quad \quad \quad i \in I_q, q > p, p, q \in M, \\
& \quad \quad \quad 1 \leq \delta_{pq} \leq \rho, \quad q > p, p, q \in M.
\end{aligned} \tag{S2}$$

上記の最適化問題では, (S1) の制約の右辺  $\sqrt{\delta_{pq}}$  が, 十分に大きい正の定数  $\rho$  を用いて,  $(\delta_{pq} + \sqrt{\rho}) / (1 + \sqrt{\rho})$  と線形化されている. この関数は, 区間  $[1, \rho]$  で  $\sqrt{\delta_{pq}}$  の下限を与えるアフィン関数となっている. ここで, 制約  $\delta_{pq} \leq \rho$  が追加されているが,  $\rho$  が十分に大きい場合, (S1) の任意ののパレート解  $z$  が (S2) で実行可能であるとみなすことができる. また, 大きい  $\rho$  のもとでは,  $\delta_{pq}$  の上限が大きくなるので得られる解の選択肢が増える. 一方で, 近似精度は悪くなることが知られている<sup>5)</sup>.

さらに, Kusunoki らは (S2) に多少の侵入を許すようにスラック変数  $\xi$  を導入することで, これをソフトマージンモデルへ拡張している<sup>1)</sup>.

(S1) に, 前述と同様の近似を施すことで, 以下のような多目的最適化問題を得る.

$$\begin{aligned}
& \min_{w, b, \delta} r_{12}(z), r_{23}(z), \dots, r_{(m-1)m}(z) \\
& \text{s.t.} \quad (w^p - w^q)^\top \phi(x^i) + (b^p - b^q) \geq \frac{\delta_{pq} + \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}}, \\
& \quad \quad \quad i \in I_p, q > p, p, q \in M, \\
& \quad \quad \quad (w^q - w^p)^\top \phi(x^i) + (b^q - b^p) \geq \frac{\delta_{pq} + \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}}, \\
& \quad \quad \quad i \in I_q, q > p, p, q \in M, \\
& \quad \quad \quad 1 \leq \delta_{pq} \leq \rho, \quad q > p, p, q \in M.
\end{aligned} \tag{S3}$$

杉本ら<sup>5)</sup> と Matsugi ら<sup>2)</sup> は, (S3) をスカラー化手法の一つである参照点法<sup>3)</sup> を用いて求解した. 参照点法によって導出される単目的問題は 2 次錐計画問題となり, 容易に求解可能である. 杉本ら<sup>5)</sup> は, さらに, カーネル主成分分析で得られる主軸や  $k$  平均法によって得られるクラスター重心が張る空間にデータを射影することで, 法線ベクトルに必要な変数の数を減らし, 計算量を削減した. この手法によって得られる識別器は, 射影なしの元のデータから得られるものと同程度の汎化性能であると報告されている. 参照点法とカーネル主成分分析については次節で詳細を述べる.

### 3 ソフトマージン近似的多目的マルチクラス SVM

#### 3.1 ソフトマージンへの拡張

本研究では, (S3) で定式化されたハードマージン近似的多目的マルチクラス SVM をソフトマージンモデルへ拡張する. そのために多クラス線形識別関数に対する損失について考える.

まず, 2 クラス線形識別では, SVM ではヒンジ損失関数によって誤差を評価する. データ  $(\phi(x^i), y_i)$  に対する損失は  $\max\{0, 1 - y_i(w^\top \phi(x^i) + b)\}$  で与えられる. これは識別超平面から距離  $1/\|w\|$  (この量をマージンと呼ぶ) 以下の領域 (マージン領域) に  $\phi(x^i)$  がどの程度侵入しているかを表している. もし, ある正の実数  $a$  を用いて, マージンを  $a/\|w\|$  と定義しても,  $w' = w/a$  と置き換えることで,  $1/\|w'\|$  の形式が得られる. マージン領域のクラス  $y_i$  側の境界からの距離 (侵入量) は

$$\max \left\{ 0, \frac{1}{\|w\|} - \frac{y_i(w^\top \phi(x^i) + b)}{\|w\|} \right\}$$

となるので, ヒンジ損失はマージンを 1 に正規化したときの侵入量となる.

マルチクラス SVM の損失を定義するために, マルチクラス線形識別における侵入量を考える. 3 クラス分類に対する線形識別の例を Fig. 2 に示す. ある正の実数  $\delta_{pq}$  を用いて, クラスペア  $(p, q)$  間のマージンを  $\sqrt{\delta_{pq}}/\|w^p - w^q\|$  で与える. マルチクラス識別の場合, すべてのクラスペア  $(p, q)$  に対して, それらのマージンを  $1/\|w^p - w^q\|$  の形式で与えられないことに注意する. データ点  $(\phi(x^i), y_i)$  (ただし  $y_i = p$ ) に対して, クラスペア  $(p, q)$  に関するマージン領域への侵入量は, 2 クラスの場合と同様に考えると,

$$\max \left\{ 0, \frac{\sqrt{\delta_{pq}}}{\|w^p - w^q\|} - \frac{(w^p - w^q)^\top \phi(x^i) + (b^p - b^q)}{\|w^p - w^q\|} \right\}$$

となる. マージンを 1 に正規化したときの侵入量を損失として定義する. したがって, クラスペア  $(p, q)$  とクラス  $p$  のデータ点  $(\phi(x^i), y_i)$  に対して, 識別関数  $z = (w, b, \delta)$  の損失は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
& L_{qi}(z) \\
& = \max \left\{ 0, \frac{\sqrt{\delta_{pq}} - (w^p - w^q)^\top \phi(x^i) - (b^p - b^q)}{\sqrt{\delta_{pq}}} \right\}
\end{aligned}$$

ここで,  $L_{qi}$  はクラスペア  $(p, q)$  に対する損失であるが,  $i \in I_p$  であることから, 添字  $p$  は省略し  $q$  のみを表示している.

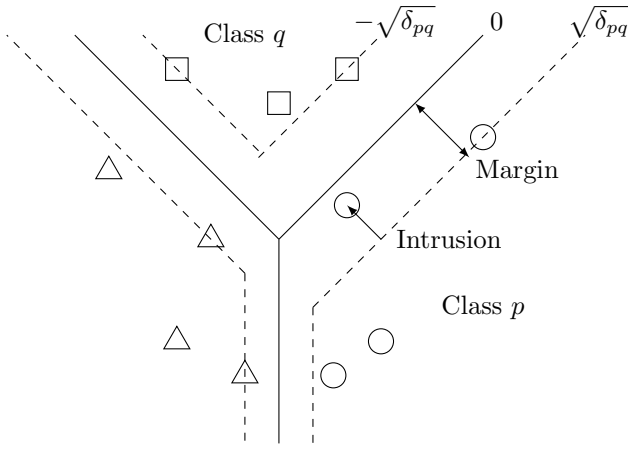


Fig. 2: Linear discriminant for 3-class problem. The lines are the boundaries with respect to class pairs, i.e.,  $\{\varphi \in F \mid (w^p - w^q)^\top \varphi + (b^p - b^q) = 0\}$ , and the two dashed lines parallel with each line indicate the margin region, i.e.,  $\{\varphi \in F \mid |(w^p - w^q)^\top \varphi + (b^p - b^q)| \leq \sqrt{\delta_{pq}}\}$ .

クラスペア  $(p, q)$  とデータ  $\{(\phi(x^i), y_i)\}_{i \in I_p \cup I_q}$  に対する損失を考慮して,  $(p, q)$  の目的関数を

$$\frac{1}{2} \frac{\|w^p - w^q\|^2}{\delta_{pq}} + \frac{\zeta^2}{2} \left( \sum_{i \in I_p} (L_{qi}(z))^2 + \sum_{i \in I_q} (L_{pi}(z))^2 \right)$$

で定める。ここで,  $\zeta$  は制約をどの程度緩和するかを決定するパラメータである。変数

$$(\xi_{1i})_{i \notin I_1}, (\xi_{2i})_{i \notin I_2}, \dots, (\xi_{mi})_{i \notin I_m}$$

を導入すると, 以下のような多目的最適化問題を得る。

$$\begin{aligned} \min_{w, b, \delta, \xi} \quad & \hat{r}_{12}(z), \hat{r}_{23}(z), \dots, \hat{r}_{(m-1)m}(z) \\ \text{s.t.} \quad & (w^p - w^q)^\top \phi(x^i) + (b^p - b^q) + \xi_{qi} \geq \sqrt{\delta_{pq}}, \\ & \quad \quad \quad i \in I_p, q > p, p, q \in M, \\ & (w^q - w^p)^\top \phi(x^i) + (b^q - b^p) + \xi_{pi} \geq \sqrt{\delta_{pq}}, \\ & \quad \quad \quad i \in I_q, q > p, p, q \in M, \\ & \delta_{pq} \geq 1, \quad q > p, p, q \in M. \end{aligned} \quad (S4)$$

ここで,  $\xi = (\xi_{pi})_{i \notin I_p, p \in M}$  であり,  $\hat{r}_{pq}$  は, (S4) の実行可能解  $z = (w, b, \delta, \xi)$  に対し,

$$\hat{r}_{pq}(z) = \frac{1}{2} \frac{\|w^p - w^q\|^2}{\delta_{pq}} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{\sum_{i \in I_p} \xi_{qi}^2 + \sum_{i \in I_q} \xi_{pi}^2}{\delta_{pq}}$$

である。定式化において, 2乗ヒンジ損失を用いることで, 近似された多目的最適化問題のスカラー化を2次錐計画問題に帰着させることができる。

### 3.2 カーネル主成分分析

本研究では, 次元削減をして計算量を減らすために, カーネル主成分分析<sup>4)</sup>を各クラスに適用することで主軸を求め, データと法線をその主軸が張る空間に限定する。まず, 全体のデータを, その重心が原点になるように中心化を行う。そして, クラス  $p$  のデータから主軸  $\psi^{p,1}, \psi^{p,2}, \dots, \psi^{p,\eta_p}$  を得る。クラス  $p$  の法線ベク

トル  $w^p$  を得られた主軸が張る空間に限定する。このとき, 主軸  $\psi^{q,h}$  に対する  $w^p$  の成分を  $\beta_{q,h}^p$  と表記する。また, データ点  $\phi(x^i)$  も主軸が張る空間に限定する。  $\psi^{q,h}$  に対する成分は  $\phi(x^i)^\top \psi^{q,h}$  となるが, これを  $\psi_{q,h}(x^i)$  と表記する。各  $\psi^{q,h}$  が特徴ベクトルの重み付き和で与えられることから,  $\psi_{q,h}(x^i)$  はカーネル関数の値の重み付き和によって表現できることに注意する。

$\beta = (\beta_{p,h})_{p \in M, h \in \{1, \dots, \eta_p\}} \in R^{\sum_{p \in M} \eta_p}$  と定義する。また,  $\psi(x)$  も同様に定義する。識別関数は以下のように表される。

$$f(x) = \operatorname{argmax}_{p \in M} \{(\beta^p)^\top \psi(x) + b^p\}$$

さらに, 法線ベクトルとデータを主軸の張る空間に限定することで, 問題 (S4) は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \min_{\beta, b, \delta, \xi} \quad & \hat{r}_{12}(z), \hat{r}_{23}(z), \dots, \hat{r}_{(m-1)m}(z) \\ \text{s.t.} \quad & (\beta^p - \beta^q)^\top \psi(x^i) + (b^p - b^q) + \xi_{qi} \geq \sqrt{\delta_{pq}}, \\ & \quad \quad \quad i \in I_p, q > p, p, q \in M, \\ & (\beta^q - \beta^p)^\top \psi(x^i) + (b^q - b^p) + \xi_{pi} \geq \sqrt{\delta_{pq}}, \\ & \quad \quad \quad i \in I_q, q > p, p, q \in M, \\ & 1 \leq \delta_{pq} \leq \rho, \quad q > p, p, q \in M. \end{aligned} \quad (S5)$$

ここで,  $\hat{r}_{pq}$  は,

$$\begin{aligned} \hat{r}_{pq}(\beta, \delta, \xi) \\ = \frac{1}{2} \frac{\|\beta^p - \beta^q\|^2}{\delta_{pq}} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{\sum_{i \in I_p} \xi_{qi}^2 + \sum_{i \in I_q} \xi_{pi}^2}{\delta_{pq}} \end{aligned}$$

である。使用する主軸の数を減らすことで変数の数を減らすことができ, (S5) を求解する計算時間の削減が期待できる。

### 3.3 参照点法を用いた求解法

多目的最適化問題 (S5) の求解のためにスカラー化手法を用いて単目的最適化問題に導出する。本研究では, スカラー化手法として参照点法<sup>3)</sup>を用いる。参照点法とは, 意思決定者が望む目標値をもとに参照点を設定し, その点から実行可能解までの距離が最小となる解を求める手法である。参照点法と (S3) で用いた近似を組み合わせるにより, 以下のような単目的最適化問題に導出する。

$$\begin{aligned} \min_{\beta, b, \xi, \hat{r}, \delta} \quad & \max_{p, q \in M} \{\omega_{pq}(\hat{r}_{pq} - r_{pq}^*)\} + \mu \sum_{p, q \in M} \omega_{pq} \hat{r}_{pq} \\ \text{s.t.} \quad & 2\hat{r}_{pq}\delta_{pq} \geq \|\beta^p - \beta^q\|^2 + \zeta^2 \left( \sum_{i \in I_p} \xi_{qi}^2 + \sum_{i \in I_q} \xi_{pi}^2 \right), \\ & \hat{r}_{pq} \geq 0, \delta_{pq} \geq 0, \quad q > p, p, q \in M, \\ & (\beta^p - \beta^q)^\top \psi(x^i) + (b^p - b^q) + \xi_{qi} \geq \frac{\delta_{pq} + \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}}, \\ & \quad \quad \quad i \in I_p, q > p, p, q \in M, \\ & (\beta^q - \beta^p)^\top \psi(x^i) + (b^q - b^p) + \xi_{pi} \geq \frac{\delta_{pq} + \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}}, \\ & \quad \quad \quad i \in I_q, q > p, p, q \in M, \\ & 1 \leq \delta_{pq} \leq \rho, \quad q > p, p, q \in M. \end{aligned} \quad (S6)$$

ここで,  $r^*$  は参照点,  $\mu$  は正の定数,  $\omega$  は非負の要素を持つ重みベクトルである。(S6) の目的関数の第一

項はチェビシェフノルムを表し、第二項は線形加重和を表している。  $\mu$  はこのノルムのバランスを調整するパラメータである。(S6)はこの目的関数が最小となる(S5)のパレート解を求める問題である。

参照点  $r^* = 0$  とし、重みベクトルは以下の2通りに設定した。

$$\begin{aligned} \text{(RP0)} \quad & \omega_{pq} = 1, \\ \text{(RP1)} \quad & \omega_{pq} = \|g_p - g_q\|^2, \end{aligned}$$

ただし、  $g_p$  は、各クラスの重心  $g_p = (1/|I_p|) \sum_{i \in I_p} \psi(x^i)$  である。各クラスの重心間の距離が大きい場合、クラス間の幾何マージンも大きくなる可能性が高いという考えに基づいてこの選択を行った。問題(S6)は単目的で、凸2次錐最適化問題でもあるため、内点法などを用いて容易に求解可能である。本研究では、さらに(S6)の双対問題を考える。主問題が凸2次錐最適化問題の場合、双対問題も2次錐最適化問題となる。双対問題の形式をソルバに入力することで、主問題の形式と比較して、高速化、安定化する場合がある。以下に(S6)の双対問題を示す。

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \beta, \gamma, \eta, t} \quad & - \sum_{p \in M \setminus \{y_i\}} \sum_{i \in I} \alpha_{pi} \\ & + \sum_{p, q \in M} ((\rho - 1) \gamma_{pq} + t_{pq} + \omega_{pq} r_{pq}^* \eta_{pq}) \\ \text{s.t.} \quad & - \sum_{i \in I_p} \sum_{q \neq p} \alpha_{qi} \psi(x^i) + \sum_{i \in I \setminus I_p} \alpha_{pi} \psi(x^i) \\ & - \sum_{q > p} \beta^{pq} + \sum_{q < p} \beta^{qp} = 0, \quad p \in M, \\ & - \sum_{i \in I_p} \sum_{q \neq p} \alpha_{qi} + \sum_{i \in I \setminus I_p} \alpha_{pi} = 0, \quad p \in M, \\ & \frac{1}{1 + \sqrt{\rho}} \left( \sum_{i \in I_p} \alpha_{qi} + \sum_{i \in I_q} \alpha_{pi} \right) + \gamma_{pq} - t_{pq} \geq 0, \\ & \qquad \qquad \qquad q > p, \quad p, q \in M, \\ & \sum_{p, q \in M} \eta_{pq} = 1, \quad q > p, \quad p, q \in M, \\ & 2t_{pq} \omega_{pq} (\eta_{pq} + \mu) \\ & \geq \frac{1}{\zeta^2} \sum_{i \in I_p} \alpha_{qi}^2 + \frac{1}{\zeta^2} \sum_{i \in I_q} \alpha_{pi}^2 + \|\beta^{pq}\|^2, \\ & \qquad \qquad \qquad q > p, \quad p, q \in M, \\ & \alpha_{pi} \geq 0, \quad i \in I, \quad p \in M \setminus \{y_i\}, \\ & \gamma_{pq} \geq 0, \quad q > p, \quad p, q \in M, \\ & \eta_{pq} \geq 0, \quad q > p, \quad p, q \in M, \end{aligned} \tag{S7}$$

## 4 おわりに

本稿では、誤差を許容しないハードマージンモデルで定式化されていた近似的多目的マルチクラスSVMをソフトマージンへ拡張し、参照点法による求解方法を示した。数値実験の結果は発表時に紹介する。

## 参考文献

- 1) Y. Kusunoki. and K. Tatsumi.: A Multi-class Support Vector Machine Based on Geometric Margin Maximization. In: Huynh VN., Inuiguchi M., Tran D., Denooux T. (eds) Integrated Uncertainty in Knowledge Modelling and Decision Making. IUKM 2018. Lecture Notes in Computer Science, vol 10758. Springer, Cham. (2018)
- 2) Y. Matsugi, T. Sugimoto, Y. Qi, Y. Kusunoki and K. Tatsumi: Approximate Multiobjective Multiclass SVM by Using the Reference Point Method, 2018 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 3535/3540 (2018)
- 3) R. E. Steuer.: Multiple Criteria Optimization: The Theory, Computation, and Application (1986)
- 4) J. Shawe-Taylor. and N. Cristianini.: カーネル法によるパターン解析 (大北剛訳), 共立出版 (2010)
- 5) 杉本, 威, 楠木, 巽: 多クラス分類問題に対する幾何マージン最大化多目的サポートベクトルマシンの近似解法, システム制御情報学会発表講演会 (2017)
- 6) K. Tatsumi., R. Kawachi., K. Hayashida. and T. Tanino.: Multiobjective Multiclass Support Vector Machines Maximizing Geometric Margins, Pacific Journal of Optimization, vol 6, no 1, 115/141 (2010)
- 7) K. Tatsumi. and T. Tanino.: Support Vector Machines Maximizing Geometric Margins for Multi-class Classification, TOP: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research, 815/840 (2014)
- 8) V. Vapnik.: Statistical Learning Theory, Wiley Interscience Publication (1998)